ECHEGARAY Y LA TEORIA DE GALOIS

per

SANTIAGO GARMA

Con el comienzo del reinado de Isabel II cambia la filosofía y la política educativa de los gobiernos monárquicos anteriores, y sin romper completamente con las situaciones pasadas, en la enseñanza superior se ofrece una nueva estructura universitaria y se crean las Escuelas de Ingeniería. La nueva organización aparece, de forma concreta, diseñada en la Ley de Moyano de 1857. Las Facultades universitarias serían seis, una de las cuales fue la de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, y las enseñanzas superiores de ingeniería serían impartidas en las Escuelas de Caminos, Canales y Puertos, Minas, Montes, Agrónomos, Industriales, y en la de Arquitectura.

Hasta entonces, los estudios científicos no habían logrado su sitio en la Universidad y la existencia de las Escuelas de Ingenieros iba a forzar su aceptación. Así pues, como reconoce Francisco Giner, "la universidad no comienza en realidad a renovarse, o más bien a ser removida, hasta los tiempos constitucionales... nuestro partido moderado (...) emprendió en múltiples tanteos y vertiginoso tejer y destejer, la reforma de nuestra enseñanza, sobre moldes análogos a los franceses" y continúa, señalando las principales características de reforma, "la secularización en todos los órdenes" y "una confianza que hoy (1916) nos parece ingenua y rayana en la superstición en la fuerza poco menos que omnipotente del precepto, de la reglamentación y de la ley. Esta confianza no es hija de la Revolución... sino del antiguo régimen de las monarquías absolutas."[1]

Esta breve reflexión, a principios del siglo XX, después de casi 50 años de cambios en la Universidad, permite entender cómo, en aquellas circunstancias, los resultados de la enseñanza superior iban a producir unos Licenciados e Ingenieros llenos de contradicciones. Estudiaron en unas Facultades y Escuelas cuyos planes de aprendizaje habían sido reproducidos del modelo francés, los libros de estudio eran la mitad de autor español y la otra mitad de autor francés, y el trabajo académico obedecía a la idea de que el conocimiento se adquiría racionalmente aprendiendo lo ya descubierto por los científicos (geómetras e ingenieros) y estudiando la naturaleza, pero al mismo tiempo se creía que los conceptos, las teorías y las leyes científicas eran el resultado de mentes geniales que tenían profundos y extensos conocimientos científicos como un don, natural o divino, pero nacido con ellos.

Estos nuevos universitarios que llenarían la mayor parte del espacio cultural que había en la sociedad española, eran de una indudable valía científica, a pesar de sus profundas contradiciones entre la ambición de renovación científica y el mantenimiento de reglas de organización de la actividad universitaria e investigadora que satisfacían a los sectores más aristocráticos y conservadores de la sociedad española de la segunda mitad del XIX. Constituirían la generación que formó a científicos e ingenieros como Terradas, Rey Pastor, Torroja, Mataix y otros.

Entre los temas de matemáticas que más atrajeron la atención de los investigadores desde el final del siglo XVIII, y durante todo el XIX, destacaba notablemente el Álgebra que, además, es el campo en el que se obtienen resultados espectaculares. Lagrange, en 1798, y Serret en 1894 definieron que el objeto principal del álgebra era la solución de ecuaciones.[2]

El último resultado notable, con anterioridad al siglo XVIII, en el Álgebra procede del siglo XVI: la solución general a las ecuaciones de 3° y 4° grado. Los intentos posteriores para extender estos resultados a ecuaciones de mayor grado no tuvieron éxito, pero llevaron a especulaciones importantes que significaron un replanteamiento del problema y la fundamentación de las bases del Álgebra moderna.

El primer concepto que significó un planteamiento diferente del tradicional fue el de *sustitución*, que permitió asociar entre sí distintas permutaciones. El análisis sistemático de las soluciones conocidas de las ecuaciones de 3° y 4° grado llevó a Van der Monde, en 1770, y después a Lagrange, a considerar la ambigüedad introducida al determinar los radicales en las fórmulas de solución de las ecuaciones de grado menor o igual que 4. Lagrange demostró que los radicales cúbicos de la fórmula que resuelve la ecuación de 3er grado, según del Ferro, pueden escribirse en la forma $1/3\,(x_1 + \omega\, x_2 + \omega^2 x_3)$,[3] donde ω es raíz cúbica de la unidad, y x_1, x_2, x_3, raíces de la ecuación, tomadas en un cierto orden. Entonces señala que la función de la forma $(x^1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3$ sólo toma dos valores distintos para toda permutación de las tres raíces. Un análisis semejante aplicado a las soluciones de la ecuación de cuarto grado le dió una función de las soluciones de la forma $\varnothing = x_1 x_2 + x_3 x_4$, tomadas éstas en un cierto orden, que para las permutaciones de las cuatro raíces tomaba tres valores distintos, lo que le llevó a comprobar que dicha función era raíz de una ecuación de tercer grado cuyos coeficientes son funciones racionales de los coeficientes de la ecuación dada. A partir de estos resultados Lagrange se puso a estudiar la ecuación algebráica de grado n

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots \ a_{n-1}x + a_n = 0$$

y consideró una función V, de las raíces de esta ecuación, que puede tomar v valores al permutar las raíces. Demostró que este valor v es un divisor de n! y también que si V_1 y V_2 son dos funciones racionales de las raíces de la ecuación tales que fuesen invariantes al hacer las mismas permutaciones de las raíces, entonces una es función racional de la otra y de los coeficientes de la ecuación. Introdujo entonces la resolvente de Lagrange $y_k = \sum_{i=1}^{i=n} \omega_k^i x_i$, donde ω_k^i son las potencias de la raíz n-sima de la unidad; después mostró que conocer estos n números implicaba conocer las raíces x_i e intentó determinar el grado de la ecuación que pueden satisfacer los y_k. Finalmente demostró que si n es primo, los y_k eran raíces de una ecuación de grado $n - 1$ cuyos coeficientes son funciones racionales de una ecuación de grado $(n - 2)!$. Lagrange resume su trabajo en tres puntos principales:[4] "1°) todas las funciones semejantes de las raíces x', x", x"', ... de una ecuación se determinan precisamente por ecuaciones del mismo grado. 2°) este grado será siempre igual al número $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \mu$ (donde μ es el grado de la ecuación dada) o un divisor de este número. 3°) para hallar directamente la ecuación más sencilla $\theta = 0$ por la cual cualquier función de las raíces x', x", x"', ... se determina, se necesita encontrar todos los valores distintos que la función puede tomar al permutar las raíces x', x", ... y tomando estos valores como raíces de la ecuación buscada, se determinarán los coeficientes de la ecuación por procedimientos conocidos." Modernamente estas conclusiones han sido traducidas en forma de teoremas, uno de los cuales establece que en un grupo finito el orden de un subgrupo divide el orden del grupo.

Finalmente, Lagrange intentó aplicar los principios generales que había descubierto a la solución de la ecuación de quinto grado. Para que esta ecuación tenga solución debería ser posible determinar la *resolvente;* es decir, la expresión $\o$ que toma r valores según las posibles permutaciones de las raíces que admite una función Ψ, de la forma $\Psi = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$, y que tuviese las raíces de una ecuación de grado r cuyos coeficientes fuesen funciones racionales de los coeficientes de Ψ y de los coeficientes de la ecuación general. Lagrange pudo construir así una resolvente que tenía seis valores, necesitando que sólo tuviese cuatro, pero es que ésta no existía. Así pues, señaló que "se puede aplicar éste (procedimiento) a la ecuación de quinto o mayor grado, cuya solución no se conoce actualmente; pero esta aplicación necesita un gran número de procedimientos y cálculos, cuyo éxito final es dudoso, lo que no nos permite emplear en ello ahora más tiempo.

Esperamos poder volver, no obstante, en otro momento a este problema, y nos contentamos con dejar expuestos los fundamentos de la teoría que nos parece nueva y transcendente".[5]

Después de Lagrange, fue Paolo Ruffini (1765-1822) quien intentó demostrar la irresolubilidad de la ecuación de 5° grado. Son dos los trabajos en los que están expuestos principalmente sus ideas y la demostración de la irresolubilidad que, a pesar de su dificultad, se considera correcta. El primero de ellos fue la *Teoria Generale delle Equazioni,* de 1759, y el segundo la *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali,* de 1813. En estos trabajos, la notación y las ideas eran continuación de las de Lagrange, pero tenía como dificultad el no haber encontrado una notación adecuada para expresar las permutaciones. Los resultados y los trabajos mismos de Ruffini fueron prácticamente ignorados por los matemáticos contemporáneos. Por ejemplo, Cauchy, que era considerado una de las mayores autoridades matemáticas de su tiempo, le escribió reconociendo que su demostración es correcta, pero sin embargo ni la incluyó en sus obras ni hizo referencia a ella. Por el contrario, Abel se refirió a la demostración de Ruffini en términos más decididos y claros: "El primero y, si no estoy equivocado, el único que antes que yo ha intentado demostrar la imposibilidad de la solución algrebraica de una ecuación en general, ha sido el geómetra Ruffini. Pero su demostración es tan complicada que es muy difícil afirmar lo acertado de su razonamiento. Me parece que no son siempre satisfactorios."[6]

De la relación de nombres y trabajos dedicados al problema de la solución algebraica de las ecuaciones se puede inducir que, durante los siglos XVIII y XIX, fue considerado uno o, quizás, el más importante de los problemas del Álgebra. La ambición de reclamar el éxito de haber alcanzado una solución creó rivalidades entre los matemáticos más importantes de cada país como Lagrange, Cauchy y Gauss y motivó a jóvenes, menos conocidos, como Abel y Galois, en la exposición de otros puntos de vista que supondrían otra comprensión y el nacimiento del Álgrebra Moderna.

Otro de los más famosos matemáticos que obtuvo resultados importantes en el desarrollo de la Teoría de Galois fue Carl Friedrich Gauss (1777-1855). En sus *Disquisitiones Arithmeticae,* publicada en 1801, se encuentra que como aplicación de algunos resultados, obtenidos en la teoría de números, a las ecuaciones trigonométricas demostró que la ecuación $x^n - 1 = 0$ tiene solución algebraica para cualquier entero positivo n. Aunque la demostración aparentemente no tiene nada que ver con la teoría de grupos, revisiones posteriores de la misma han establecido que es fundamental para la obtención de la mayor parte de las propiedades importantes de los grupos cíclicos. El estudio de esta ecuación llevó al de la ecuación $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0$ que pertenece a una clase especial de ecuaciones de la ecuación general de grado n. Y Gauss era consciente de que su trabajo era un escalón para aproximarse a soluciones más generales. Así, refiriéndose a sus resultados, dice: "La discusión precedente tiene que ver con el descubrimiento de ecuaciones auxiliares. Ahora señalaremos una propiedad notable en relación con su solución. Todo el mundo sabe que los geómetras más eminentes han sido inefectivos al investigar la solución general de una ecuación de grado mayor que cuatro o (para definir la investigación más precisamente) en la reducción de ecuaciones mixtas a ecuaciones puras. Y no son pocas las dudas sobre que el problema no es tanto como que desafía los métodos modernos de análisis, como que se considera imposible... No obstante, es cierto que existen innumerables ecuaciones mixtas de distintos grados que admiten reducción a ecuaciones puras, y confiamos en que los geómetras encontrarán gratificante si demostramos que nuestras ecuaciones son siempre de esta clase."[7] Estos resutlados de Gauss fueron considerados por el mismo Galois, quien señaló la conexión entre ellos y su propio trabajo.

En la historia de la Teoría de Galois, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) tuvo un papel importante y controvertido en su intervención al juzgar las Memorias de Galois. Introdujo la notación para las permutaciones tal como se usa en la actualidad, y en 1815 publicó una *Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquerir, lorsqu'on y permute de toute les manières possibles les quantités qu'elle renferme,* memoria dedicada a demostrar un teorema basado en que "el número de valores diferentes que alcanza una expresión no-simétrica de n cantidades, no puede ser menor que el mayor número primo inferior a n, a menos que sea 2."[8] Además contiene en embrión muchas de las ideas que después se usaron en la teoría de Grupos.

Después de este trabajo y de otro, en el que trata propiedades de los grupos y de las permutaciones, no volvió a tocar el tema de las permutaciones y sustituciones hasta pasados casi 30 años, y cuando lo hizo no se refirió en absoluto al primer trabajo. Esto quizá tuviera algo que ver con las diferencias con Galois y el reconocimiento, posterior, de la Academia de la importancia de sus trabajos.

Por fin, en 1824, en un artículo titulado "*Mémoire sur les equations algébriques, ou l'on démontre l'impossibilité de la resolution de l'equation générale du cinquième degré*", del noruego Niels Henrik Abel, se daba una demostración válida y reconocida como tal de la imposibilidad de solución de la ecuación de quinto grado.

Lagrange había llegado a determinar que la solución algebraica de la ecuación general de grado n

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

depende de la construcción de una sucesión de resolventes. Ruffini, que había entendido el problema, demostró que si la solución era posible, necesitaría más de una resolvente y Abel[9] demostró que la forma general de la última resolvente, la que daba una raíz de la ecuación general, debería ser de la forma

$$x = q_0 + p^{1/n} + q_2 p^{2/n} + \dots + q_{n-1} p^{n-1/n}$$

en donde n es primo y $q_0, q_2, \dots, q_{n-1}, p$, expresiones algebraicas de los coeficientes de la ecuación general, y tal que $p^{1/n}$ no se puede expresar racionalmente en función de los términos $q_0, q_2, \dots, q_{n-1}$, lo que, esencialmente, es repetición de un resultado de Lagrange. Después, a partir de estas resolventes, correspondientes a las n raíces, Abel obtiene otras n-ecuaciones en las que las potencias de $p^{1/n}$ y los coeficientes $q_0, q_2, \dots q_{n-1}$ son funciones racionales de las raíces, de la ecuación general de grado n propuesta, y de las raíces de la unidad. Una vez clarificadas las expresiones algebraicas y computados los sumandos de la última resolvente, Abel concluye que "si una ecuación general tiene solución algebraicamente, cada una de las raíces de la ecuación general puede ponerse en forma tal que las funciones algebraicas de que está compuesta pueden expresarse con funciones racionales de las raíces de la ecuación propuesta,"[10] lo que es conocido como el teorema de Abel.

Después de combinar sus resultados con los de Cauchy, Abel supone que la ecuación general de quinto grado tiene solución y demuestra que una raíz de la ecuación general no puede ser racional en los coeficientes de la ecuación. Entonces la representación de una raíz debe contener una expresión algebraica de primer orden, v, donde $v = R^{1/m}$, siendo m primo y R racional con respecto a los coeficientes de la ecuación general dada y, así, simétrica respecto a las raíces. Hace uso de los resultados de Lagrange y Cauchy, concluyendo que los posibles valores para m son 2 ó 5; $m = 5$ le lleva, enseguida, a una contradicción, y $m = 2$ implica una expresión algebraica de segundo orden, que también le lleva a contradicción. Ambas contradicciones eran similares; la primera, por ejemplo, era consecuencia de que si la expresión $1/5\ (x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5) = R^{1/5}$ donde $\alpha^5 = 1$ definiese una raíz de particular de una ecuación de 5° grado para cualquier permutación de las cinco raíces x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, el primer miembro tendrá 120 valores distintos y el segundo 10, contradicción que completaba la demostración de la imposibilidad de solución de la ecuación de 5° grado. Poco antes de morir, Abel publicó la "*Mémoire sur une classe particulière d'equations resolubles algébriquement*" en la que llegaba al importante resultado siguiente: "Si las raíces de una ecuación, de cualquier grado, están relacionadas entre sí de tal manera que *todas* estas raíces pueden representarse racionalmente en función de una de ellas, que llamaremos x, y si, además, designamos dos raíces cualesquiera, como θx y $\theta_1 x$, se cumple $\theta\, \theta_1 x = \theta_1 \theta x$, entonces la ecuación que se considera tendrá siempre solución algebraica. También, si suponemos que la ecuación es irreducible y que su grado se expresa por $\alpha_1^{v_1} \cdot \alpha_2^{v_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_\omega^{v_\omega}$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\omega$ son números primos diferentes, la solución de esta ecuación puede reducirse a la solución de las ecuaciones v_1 de grado α_1, de las ecuaciones v_2 de grado α_2, etc."[11]

Lo cual, como dice Kiernan[12], con la terminología moderna, establece la solución algebraica de aquellas ecuaciones cuyo grupo de Galois es abeliano.

Evariste Galois (1811-1832), autor de los teoremas que se han dado en llamar Teoría de Galois, es quizás, en la Historia de la Matemática, uno de los matemáticos de vida más corta y con una biografía más estudiada casi que sus trabajos.

Su fama se debe principalmente a dos artículos: "*Mémoire sur les conditions de resolubilité des equations par radicaux*", y "*Des equations primitives qui sont solubles par radicaux*", que fueron presentados a la Academia y modificados varias veces. Hasta 1846 no pudieron conocerse, cuando fueron publicados gracias a Liouville, e inmediatamente después aparecieron referencias e interpretaciones de los artículos de Galois. El concepto de grupo que antes había sido dado por Lagange, Gauss y Cauchy, pero referido a casos concretos, como el grupo simétrico, el grupo cíclico o el grupo alternante, fue tratado por Galois con toda generalidad al añadir la propiedad de clausura. Galois definió el grupo de una ecuación, que es el concepto fundamental de su teoría, definición que sigue siendo la misma, esencialmente, en un teorema con el enunciado que sigue:

"Sea una ecuación cuyas n raíces son a, b, c ... Siempre existirá un grupo de permutaciones de las letras a, b, c... que tendrá las propiedades siguientes:

1°. Que toda función de las raíces, invariante ante las sustituciones de ese grupo, sea conocida racionalmente.

2°. Recíprocamente que cada función de las raíces que pueden expresarse racionalmente sea invariante ante estas sustituciones."[13]

Al demostrar la existencia del grupo de una ecuación encuentra algunas dificultades, que desaparecen al definir lo que hoy día se conoce como subgrupo normal. Entonces aparece con más claridad qué es el grupo de una ecuación, que cumple las dos condiciones siguientes:

1°. Toda función F de las raíces invariable ante las substituciones (permutaciones) de este grupo podría escribirse $F = \psi V$ (una función racional de la raíz V) y se tendrá

$$\psi V = \psi V' = \psi V'' = \ldots = \psi V^{(n-1)}.$$

El valor de la función F puede determinarse racionalmente.

2°. Recíprocamente, si una función F es una función racional $F = \psi V$ se cumplirá que
$\psi V = \psi V' = \psi V'' = \ldots = \psi V^{(n-1)}$ ya que la ecuación en V no tiene divisores conmensurables y V es solución de la ecuación racional $F = \psi V$, en la que F es una cantidad racional. Entonces la función F será invariable ante las substituciones (permutaciones) del grupo (de las n permutaciones de una función racional de las raíces de una ecuación).[14]

Galois muestra cómo este concepto de grupo corresponde con el desarrollo que hace Lagrange para la solubilidad de una ecuación, en la Proposición V.

La segunda proposición que plantea Galois dice que si se hace la adjunción de raíces de una ecuación auxiliar irreducible a una ecuación dada (al cuerpo de coeficientes) se produce que el grupo de la ecuación no cambia o una partición en subgrupos conjugados; es decir, el conjunto de permutaciones se descompone en clases tales que las permutaciones en las respectivas clases forman grupos conjugados.

La tercera establece que estos grupos conjugados tienen además la propiedad de que las substituciones son las mismas en cada grupo, es decir, que el subgrupo común es normal. Precisamente, al adjuntar una raíz se le adjunta todas.

El procedimento que expone Galois es el siguiente: para resolver una ecuación dada $f(x) = 0$ algebráicamente, se encuentra una expresión V racional de las raíces, es decir, que todas las raíces tienen una expresión racional en V. Entonces se encuentra la ecuación $F(V) = 0$, cuyas raíces son los valores V_0, V_1, ... que V toma al permutar las raíces, y sea $\theta(V) = 0$ un factor de la ecuación irreducible sobre el cuerpo de coeficientes de la ecuación original $f(x) = 0$. El conjunto de permutaciones de los valores de V que son raíces de $\theta(V) = 0$ es el grupo G de la ecuación $f(x) = 0$.[15]

Como hemos podido ver, la Teoría de Galois fue el final de un problema que dió origen, en años sucesivos, al desarrollo del Algebra Moderna que adquirió su forma en el libro que Van der Waerden publicó en 1930. El desarrollo de la teoría y los comentarios a que dio lugar ha terminado en una teoría de Galois casi irreconocible, si se compara con las primeras redacciones, pero mucho más comprensible. Entre los matemáticos que trabajaron la teoría se encuentran nombres tan significativos como los de Betti, Serret, Jordan, Weber, Van der Waerden y, finalmente, Artin.

Mientras los matemáticos franceses y alemanes debatían complicados problemas, las instituciones educativas españolas, especialmente las Universidades y las Escuelas de Ingenieros, recuperaban en unos casos y aprendían en otros el interés por los conocimientos científicos. Por un lado, la moderación en las reformas, que mantenían una estructura profesoral jerárquica y poco numerosa y, por otro lado, el interés por aprender de estudiantes como Galdeano o Echegaray, daba como resultado una situación llena de contradicciones. A través de un hecho que debería haber sido importante, como fue la exposición de la Teoría de Galois por Echegaray, podemos conocer y comprender la historia de los científicos e ingenieros que crearon las condiciones para el aprendizaje y desarrollo de la ciencia, y en este caso, de la matemática, en España.

Don José Echegaray[16] nació en Madrid en 1832; fue ingeniero de Caminos a los 20 años y, después de ejercer la profesión durante unos años fuera de Madrid, a partir de 1855 se convirtió en profesor de la Escuela de Ingenieros de Caminos.

A lo largo de su vida académica impartió y publicó cursos de matemáticas y física cuyo contenido recogía las teorías más modernas que se habían desarrollado hasta el momento, en Geometría, Física, Cálculo de Variaciones, Termodinámica, Matrices y Determinantes y Física Matemática.

Todos los esfuerzos de Echegaray estuvieron dirigidos a conseguir que en las Escuelas y Universidades se enseñasen matemáticas modernas, se formasen buenos ingenieros y matemáticos y que las investigaciones matemáticas tuvieran el nivel necesario para ser reconocidas por los científicos de todo el mundo.

Sin entrar a discutir la inestable situación social, política y económca del país a fines del siglo XIX, que condicionaba el trabajo de científicos e ingenieros, podemos afirmar, una vez más, que si bien la enseñanza superior era laica y tenía una estructura modernizada, en relación con la que había durante el primer tercio de siglo, no estaba respaldada por una política educativa, no se contaba con los medios materiales y económicos suficientes, ni los responsables de la misma entendían siquiera que fuese necesario organizar la investigación.

Así es que, debido probablemente, como ya se señaló al principio, a la timidez de las reformas administrativas de los moderados de la época, grupos de intelectuales optaron por fundar sociedades e instituciones que supliesen con su actividad la falta de capacidad y de flexibilidad de las Instituciones públicas para extender y hacer llegar la cultura y la ciencia a la recién nacida burguesía.

Una de estas instituciones, radicada en Madrid, fue el Ateneo, que pronto adquirió fama de entidad progresista, polémica y difícil de contentar. La imagen que daba el Ateneo al resto de la sociedad española y a los círculos intelectuales europeos estaba marcada fuertemente por las polémicas que los parlamentarios mantenían en torno a los proyectos políticos gubernamentales. Era la institución culta y dedicada a la cultura por excelencia, lo que en este país quiere decir literatura y arte. Sin embargo el aula de ciencias y los trabajos científicos que se desarrollaron en el ateneo fueron aquellos que ni la Universidad ni las Escuelas de Ingenieros podían emprender. Por ello no es de extrañar que Echegaray ofreciese un curso sobre un tema tan complicado como la Teoría de Galois, que duró dos años, en el Ateneo y no en la Universidad o en la Escuela de Ingenieros. La Universidad y la enseñanza superior en general tendrían que esperar para recibir el fruto de su trabajo y sus esfuerzos modernizadores hasta los primeros años del siglo XX.

Otras de las consideraciones necesarias para entender que, en cierto sentido, la actividad científica más significativa se hiciese fuera de la Universidad, como en el siglo XVIII, son las que deben hacerse sobre las características de la formación de los científicos e ingenieros del último tercio del XIX. Por un lado, estaban los criterios docentes impuestos, tomados parcialmente de la Universidad napoleónica y el concepto de ciencia e incluso la idea de matemática como ciencia teórica de la que sólo importaban sus aspectos aplicables y de ciencia útil. Por otro lado la ruptura en una tradición educativa universitaria llevó a que Echegaray, en nuestro caso, y la mayor parte de los científicos de su generación, fueran autodidactas y aprendieran matemáticas y los aspectos más complicados de las mismas leyendo por su cuenta, sin orientación alguna, empleando textos franceses o alemanes. Esta forma de aprender les dio seguridad en sí mismos, y les permitió sentirse una clase intelectual superior. En 1866 Echegaray entró en la Academia de Ciencias; su discurso de ingreso versó sobre la Historia de las Matemáticas en España, y en él se encuentran todos los tópicos de los progresistas del XIX sobre la Historia de la Ciencia en España. La idea principal fue que en España no se habían hecho nunca matemáticas y que no existía un sólo matemático científicamente presentable, en toda la historia del país. El discurso originó diversas protestas y sirvió de revulsivo a la intelectualidad de la época, que años después se enzarzaría en una polémica, segunda parte, sobre la existencia o no de ciencia en España.

Pero una idea subyacente, referida a la forma de concebir cómo se producen las ideas científicas, era la que más afectaría el trabajo científico de Echegaray. Para él, Newton, Euler, Lagrange, fueron genios que produjeron matemáticas. Los problemas matemáticos que planteaban estaban resueltos cuando llegaban a soluciones numéricas, los números que empleaban eran los naturales, los racionales y los reales y la diferencia entre ellos es que son distintos. Los nuevos problemas matemáticos y los resultados que se encuentran no son más que el final de una historia que comenzó cuando se planteó el problema. Este resumen de ideas que se encuentran en el trabajo de Echegaray son consecuencias obtenidas de la lectura del tratamiento que da a los problemas, como el de la resolución algebraica de ecuaciones, y que permite adivinar que existe, en la concepción de Echegaray, el lastre de una formación matemática anclada o enlazada en o con la comprensión más simplista de la matemática, lo que le impidió, a pesar de la inmensa información que acumuló, entender que lo que había cambiado en las matemáticas era la comprensión del problema.

En 1896 y 1897, en el aula de Ciencias, impartió el curso sobre la *Teoría de Ecuaciones y Teoría de Galois,* que fue impreso casi inmediatamente en dos tomos de 500 y 200 páginas aproximadamente.

Desde el primer momento, nada más comenzar la lectura del texto de Echegaray, se percibe el enorme esfuerzo realizado para llegar a exponer estas lecciones. Echegaray cita los textos clásicos, como son los de Lagrange, Cauchy, Galois, Abel y Gauss, y también las últimas producciones matemáticas referidas al tema, y cita las obras de Jordan, Lie, Serret, Netto, Tannery y Vogt. El esfuerzo de lectura va acompañado, gracias a unas condiciones pedagógicas excelentes, de una simplificación de los problemas que frecuentemente se desliza hacia la trivialización de los mismos. Ahora bien, la exposición de los temas es sistemática y completa.

En el tomo 1°, que examinamos ahora, dedica las cuatro primeras lecciones a consideraciones generales y a recordar los procedimientos algebraicos, y de inmediato empieza a plantear la solución de una ecuación de grado n.

Define y explica las funciones simétricas, las ecuaciones binomias y llega a tratar detalladamente el problema de la solución de las ecuaciones de 2°, 3° y 4° grado, señalando en que consiste la resolvente.

Las cuatro lecciones siguientes desarrollan ordenadamente la teoría de las sustituciones y continúa con la teoría de grupos conocida hasta entonces. Aplica las sustituciones al estudio de las raíces de una ecuación y estudia el cuadro de Cauchy. Después seguirá con el estudio de funciones enteras, racionales algebraicas, reducibles e irreducibles, para acabar exponiendo las teorías de Galois y Abel y las consecuencias de éstas.

Ahora importa destacar lo siguiente: en cuanto a la notación, la exposición es correcta, recoge la usada habitualmente por los autores de las memorias citadas anteriormente y de entre ellas la más moderna. A lo largo de las lecciones hay una preocupación notable por hacer fáciles y asimilables los conceptos, teoremas y demostraciones que se dan. Para lo cual inmediatamente relaciona y traduce cada problema algebraico a un problema geométrico. Es decir, que para Echegaray la ecuación general $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$, se puede interpretar como una suma de vectores cuyos extremos son puntos. Pero acompaña esta simplificación con afirmaciones muy personales que hacen pensar que las lecturas matemáticas de Echegaray si bien habían sido abundantes también fueron poco profundas. Al exponer el problema que va a estudiar, dice:[17]

"Pretendemos sólo estudiar el problema de la resolución de una ecuación con una incógnita

$$x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m = 0$$

en la que x es la incógnita y $p_1, p_2, \ldots, p_m$ son cantidades conocidas: reales o imaginarias, *poco importa.*" Este "poco importa" se repite varias veces en las lecciones y nos permite conocer las intenciones de Echegaray. Esta situación se repite cuando, por ejemplo, usa el concepto de "grupo" cuya definición no es rigurosa, ni siquiera correcta.

En los capítulos dedicados a la exposición de las teorías de Galois expone la demostración informalmente, respetando el texto de Galois y le da un repaso bastante claro y didáctico a la teoría; después es cuando enuncia el teorema de Galois como conclusión de su discurso:[18]

"Supongamos una ecuación cualquiera de grado n,

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n = 0$$

ecuación que, para abreviar, representamos por $f(x) = 0$.

Poco importa para nuestro objeto que f(x) sea o no sea irreducible; pero supondremos ***expresamente que sus raíces son todas desiguales,*** y designémoslas, como siempre, por $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Formemos una función de estas raíces V, función que supondremos racional y que designaremos por

$$V = \varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Esta función que, como queda dicho, ha de ser racional en $x_1, x_2, \ldots$ ha de cumplir con esta condición: que para todas las permutaciones de las raíces ha de dar valores distintos. Es lo que hemos llamado una función de N valores, siendo N = 1, 2, 3, ..., n."

Este teorema también se lo atribuye Echegaray a Abel aunque su demostración dice que es de Galois. Como se vio antes, el enunciado de Echegaray no coincide exactamente con el de Galois, en el que incluye el enunciado de lemas, concretamente el Lema II, confundiéndolo con el teorema. Aunque la exposición es clara y didáctica, en un primer análisis, se demuestra que es insuficiente y que Echegaray no ha entendido la memoria de Galois.

Finalmente, y por lo que afecta a los conocimientos científicos en España a fines del siglo XIX, esta primera exposición de la Teoría de Galois – así como la de las lecciones de Física Matemática que Echegaray impartió en la Universidad– sirvieron indudablemente para sensibilizar y hacer sentir la necesidad de estudiar matemáticas contemporáneas (el ponerse al día) a la generación de matemáticos que sucedió a la de Echegaray y Galdeano. De esta generación formaron parte Esteban Terradas, Eduardo Torroja y Julio Rey Pastor, entre otros. Este último fue el primer matemático que incluyó como tema dentro de un curso regular la teoría de Galois.

Esta generación comenzó su vida académica en torno a 1910 y se puede afirmar que habiendo sido educados científicamente por profesores sensibles y atentos a los progresos de la matemática, aunque no llegasen a comprender totalmente el significado de los problemas discutidos en el seno de la comunidad matemática europea, superó la capacidad de investigar en matemáticas hasta alcanzar la atención de destacados matemáticos europeos. El nivel de discusión científica al que llegaron los ingenieros y matemáticos españoles corresponde con los que existían en Francia, Italia o Alemania; esto se ve muy claramente, por ejemplo, en las actas de la oposición a la Cátedra de Ecuaciones Diferenciales de la Universidad de Madrid en 1932 a la que concurrió Esteban Terradas y que fue glosada por Norberto Cuesta Durari.[19] Estas esperanzas de renacer científico fueron truncadas, una vez más, por la guerra iniciada con la sublevación de Franco en 1936.

NOTAS

1. Francisco Giner, *Obras Completas*. I. Madrid, 1916, pp. 9-11.
2. Melvin Kiernan, B., "The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin." *Archives for History of Exact Sciences*, (8), 1971, pp. 40-154.
3. Lagrange, J.L., *Oeuvres*, París, 1867-1892, vol. 3, p. 213.
4. Ibidem, *Oeuvres*, III, 373-374.
5. Ibidem, *Oeuvres*, III, 403.
6. Abel, N.H., *Oeuvres complètes*, nouvelle edition, editadas por Sylow, L., y Lie, S; Christiania, 1881, t. II, p. 218.
7. Ibidem, Melvin Kiernan, B., p. 63.
8. Ibidem, p. 65.
9. Abel dedicó expresamente tres artículos, además del citado, al planteamiento de la discusión de la solución de la ecuación de quinto grado y de grado n: *Demostration de l'impossibilité de la resolution algébrique des equations generales que passent de quatrième degré*, *Memorie sur une classe particulière d'equations résolubles algébriquement* y *Sur la resolution algebrique des equations;* Abel, N.H., *Oeuvres*, I, pp. 66-94; pp. 478-507, y, II, pp. 217-243.
10. Abel, I, p. 75.
11. Ibidem, p. 479.
12. Ibidem, p. 71.
13. Galois, E., *Ecrits et Mémoires Mathématiques*, edité par Robert Bourgne et J.-P. Azra, Paris, 1962, p. 51.
14. Ibidem, Galois, E., p. 53.
15. Ibidem, Kiernan, p. 84.
16. Sobre la biografía de Echegaray pueden verse los artículos de Sánchez Pérez, J.A., "Echegaray, rasgos biográficos", *Revista Matemática Hispano Americana*, 7, 1932, p. 49-58; Garma, S., "La primera exposición de la Teoría de Galois en España", *Llull*, 3, 1979, p. 7-14. y Garma, S., "Echegaray y Eizaguirre, José," en *Diccionario Histórico de la Ciencia Moderna en España*, ed. José M. López Piñero, Thomas F. Glick, Victor Navarro Brotons y Eugenio Portela, vol. I, Barcelona, 1983, pp. 292-294.
17. Echegaray, J., *Resolución de Ecuaciones y Teoría de Galois*, 2 vol., Madrid, 1897, I, p. 10.
18. Ibidem, Echegaray, I, págs. 381-382.
19. Cuesta, N. "Don José Barinaga *In Memoriam*", *Gaceta Matemática*, 3-4, 1966, pp. 63-86.